

# ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

## II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП (11 класс)

**11.1.** Даны ненулевые числа  $a, b, c, d$  такие, что  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{c}{b}$  и

$\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$ . Верно ли, что тогда также  $\frac{d}{c} + \frac{a}{b} = \frac{d}{b} + \frac{a}{c}$  и  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{c}$ ?

**11.2.** Петя придумал три различных иррациональных числа и записал на доске все возможные попарные суммы этих чисел. Могло ли получиться так, что Петя записал только рациональные числа?

**11.3.** Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  провели прямую, параллельную  $O_1O_2$ . Эта прямая вторично пересекла окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $C$  и  $D$ . Пусть  $E$  – середина отрезка  $CD$ . Доказать, что  $\angle O_1AO_2 = \angle O_1EO_2$ .

**11.4.** В таблицу с 45 строками и 30 столбцами записали все *различные* числа от 1 до 2024, которые *не делятся на 3*. При этом оказалось, что в любом квадрате с размерами  $2 \times 2$  и в любом прямоугольнике с размерами  $2 \times 3$  сумма чисел *делится на 3*. Верно ли, что найдется квадрат с размерами  $3 \times 3$ , в котором сумма чисел тоже делится на 3?

**11.5.** Две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов  $y = x^2 + ax + b$  и  $y = -x^2 - cx - d$ , касаются в некоторой точке. Доказать, что точка касания есть середина отрезка с концами в вершинах этих парабол.

# ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

## II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП (11 класс)

**11.1.** Даны ненулевые числа  $a, b, c, d$  такие, что  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{c}{b}$  и

$\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$ . Верно ли, что тогда также  $\frac{d}{c} + \frac{a}{b} = \frac{d}{b} + \frac{a}{c}$  и  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{c}$ ?

**11.2.** Петя придумал три различных иррациональных числа и записал на доске все возможные попарные суммы этих чисел. Могло ли получиться так, что Петя записал только рациональные числа?

**11.3.** Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  провели прямую, параллельную  $O_1O_2$ . Эта прямая вторично пересекла окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $C$  и  $D$ . Пусть  $E$  – середина отрезка  $CD$ . Доказать, что  $\angle O_1AO_2 = \angle O_1EO_2$ .

**11.4.** В таблицу с 45 строками и 30 столбцами записали все *различные* числа от 1 до 2024, которые *не делятся на 3*. При этом оказалось, что в любом квадрате с размерами  $2 \times 2$  и в любом прямоугольнике с размерами  $2 \times 3$  сумма чисел *делится на 3*. Верно ли, что найдется квадрат с размерами  $3 \times 3$ , в котором сумма чисел тоже делится на 3?

**11.5.** Две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов  $y = x^2 + ax + b$  и  $y = -x^2 - cx - d$ , касаются в некоторой точке. Доказать, что точка касания есть середина отрезка с концами в вершинах этих парабол.